⋆

Exercice 1 — Voir correction

Soit f la fonction définie par : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} cx(1-x) & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

1) Déterminer le réel c tel que f est une densité de probabilité.
2) Soit X une variable aléatoire dont la densité est f, montrer que X admet une espérance et une variance et les calculer.

⋆

Exercice 2 — Voir correction

On considère la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$F(x) = \frac{1}{1 + \mathrm{e}^{-x}}$$

1) Montrer que F est la fonction de répartition d'une variable à densité X.
2) Déterminer une densité f de X.
3) Justifier que X admet une espérance et une variance (on ne demande pas de les calculer).

⋆

Exercice 3 — Voir correction

Soit a un réel strictement positif et f la fonction définie par : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} \frac{a}{x^3} & \text{si } x \geqslant 1 \\ 0 & \text{si } -1 < x < 1 \\ \frac{a}{x^4} & \text{si } x \leqslant -1 \end{cases}$.

1) Déterminer l'unique valeur de a telle que f est la fonction de densité d'une variable aléatoire X.
2) Déterminer si X admet une espérance et une variance et les calculer le cas échéant.

⋆

Exercice 4 — Voir correction

Soit c un réel strictement positif et f la fonction définie par $\forall x \in \mathbb{R}, F(x) = \begin{cases} x^{-4} & \text{si } x \notin [-1;1] \\ c & \text{si } x \in [-1;1] \end{cases}$.

1) Déterminer l'unique valeur de c telle que f est la fonction de densité d'une variable aléatoire X.
2) Montrer que X admet une espérance et une variance et les calculer.
3) Déterminer l'ensemble des valeurs de $r \in \mathbb{N}^*$ telles que X admet un moment d'ordre r.

⋆

Exercice 5 — Voir correction

Soient $a < b$ deux réels et soit X une variable à densité suivant la loi uniforme sur l'intervalle $[a;b]$.

1) Retrouver par le calcul $E(X)$ et $V(X)$
2) On note $\sigma = \sqrt{V(X)}$. Vérifier que $E(X) - \sigma$ et $E(X) + \sigma$ sont dans l'intervalle $[a;b]$.
3) Montrer que $P(|X - E(X)| \leq \sigma) = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

⋆

Exercice 6 — Voir correction

Soient $\lambda > 0$ un réel et soit X une variable à densité suivant la loi exponentielle de paramètre λ.

1) Rappeler la fonction de densité de X en redémontrant que c'est bien une densité.
2) Retrouver la fonction de répartition de X
3) Montrer que X admet une espérance et une variance et les calculer.
4) On pose $Y = \mathrm{e}^{-X}$ et on admet que Y est une variable à densité. Déterminer la loi suivie par Y.

⋆

Exercice 7 — Voir correction

(Loi de Laplace) Soit $c > 0$. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \dfrac{c}{2}\mathrm{e}^{-c|x|}$

1) Montrer que f est une densité d'une variable aléatoire réelle X.
2) Déterminer la fonction de répartition F de X
3) Montrer que X admet une espérance et la calculer.
4) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, X admet un moment d'ordre n
5) En déduire que X admet une variance et la calculer.

★

Exercice 8 — Voir correction

Soit c un réel strictement positif et f la fonction définie par $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} x^{-4} & \text{si } x \notin [-1;1] \\ c & \text{si } x \in [-1;1] \end{cases}$.

1) Déterminer l'unique valeur de c telle que f est la fonction de densité d'une variable aléatoire X.
2) Montrer que X admet une espérance et une variance et les calculer.
3) Déterminer l'ensemble des valeurs de $r \in \mathbb{N}^*$ telles que X admet un moment d'ordre r.

★

Exercice 9 — Voir correction

(Loi β de première espèce) Pour tous réels a et b, on note, sous réserve d'existence : $I(a,b) = \int_0^1 t^{a-1}(1-t)^{b-1}\,\mathrm{d}t$

1) Montrer que $I(a,b)$ existe si et seulement si $a > 0$ et $b > 0$.
2) Soit $(a,b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$. Montrer que $bI(a+1,b) = aI(a,b+1)$ et $I(a,b+1) + I(a+1,b) = I(a,b)$.
   En déduire $I(a+1,b) = \dfrac{a}{a+b} I(a,b)$.
3) Soit $(a,b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$. On définit la fonction f sur $\mathbb{R}$ par : $\forall t \in \mathbb{R}, \quad f(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{I(a,b)} t^{a-1}(1-t)^{b-1} & \text{si } t \in]0;1[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$
   Montrer que f est une densité d'une variable aléatoire réelle X.
4) Montrer que X admet une espérance et une variance et les calculer.

★

Exercice 10 — Voir correction

Soit U une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[0,1[$ et λ un réel strictement positif. On considère la variable $V = -\frac{1}{\lambda}\ln(1-U)$.

1) Calculer $P(V \leq x)$ pour tout réel x.
2) En déduire que V est une variable aléatoire à densité et préciser une densité de V

★

Exercice 11 — Voir correction

(Loi de Cauchy) Soit $\alpha > 0$ et F la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = \alpha \cdot \arctan(x) + \dfrac{1}{2}$.

1) Montrer qu'il existe un unique réel $\alpha > 0$ tel que F est la fonction de répartition d'une variable aléatoire X. Préciser sa densité f.
2) Montrer que X n'admet ni espérance, ni variance.
3) Déterminer la loi de $Z = \dfrac{1}{X}$.

Correction des exercice

Correction de l'exercice 1 :

1) Pour que f soit positive il faut nécessairement $c \geqslant 0$.
f est continue sur $]-\infty;0[$ et sur $]1;+\infty[$ car nulle sur ces intervalles, et continue sur $[0;1]$ comme fonction polynôme. Elle est donc continue sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en 0 et en 1.
$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge et vaut $\int_0^1 ct(1-t)\,\mathrm{d}t$ car f est nulle en dehors de l'intervalle $[0;1]$ et f est continue sur $[0;1]$. Ainsi :

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t &= \left[\frac{ct^2}{2} - \frac{ct^3}{3}\right]_0^1\\ &= \frac{c}{2} - \frac{c}{3}\\ &= \frac{c}{6}\end{aligned}$$

donc f est une densité de probabilité si et seulement si $c = 6$.

2) $\int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)\,\mathrm{d}t$ converge absolument et vaut $\int_0^1 tf(t)\,\mathrm{d}t$ car f est nulle en dehors de l'intervalle $[0;1]$ et $t \mapsto tf(t)$ est continue sur $[0;1]$. On en déduit que X admet une espérance et :

$$\begin{aligned}E(X) &= \int_0^1 tf(t)\,\mathrm{d}t\\ &= \int_0^1 (ct^2 - ct^3)\,\mathrm{d}t\\ &= \left[\frac{ct^3}{3} - \frac{ct^4}{4}\right]_0^1\\ &= \frac{c}{3} - \frac{c}{4}\\ &= \frac{c}{12}\\ &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

pour les mêmes raison X admet un moment d'ordre 2 donc une variance et

$$\begin{aligned}E(X^2) &= \int_0^1 t^2 f(t)\,\mathrm{d}t\\ &= \int_0^1 (ct^3 - ct^4)\,\mathrm{d}t\\ &= \frac{c}{4} - \frac{c}{5}\\ &= \frac{c}{20}\\ &= \frac{3}{10}\end{aligned}$$

donc d'après la formule de Koenig-Huygens :

$$\begin{aligned}V(X) &= E(X^2) - E(X)^2\\ &= \frac{3}{10} - \frac{1}{4}\\ &= \frac{1}{20}\end{aligned}$$

Correction de l'exercice 2 :

1) $x \mapsto 1 + \mathrm{e}^{-x}$ est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et à valeurs strictement positive, donc par inverse F est $\mathcal{C}^1$ (et donc aussi continue) sur $\mathbb{R}$.
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $F'(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{(1+\mathrm{e}^{-x})^2} > 0$ don F est croissante sur $\mathbb{R}$, et on a par opérations sur les limites :
$$\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \to +\infty} F(x) = 1$$
donc F est bien la fonction de répartition d'une variable à densité X.

2) D'après le calcul précédent, $f : x \mapsto \dfrac{\mathrm{e} - x}{(1+\mathrm{e}^{-x})^2}$ est une densité de f.

3) Montrons que X admet des moments à tout ordre. Soit $r \in \mathbb{N}$, montrons que $\int_{-\infty} |t|^r f(t)\,\mathrm{d}t$ converge.
La fonction $t \mapsto |t|^r f(t)$ est paire : en effet, pour tout $t \in \mathbb{R}$ on a :
$$\begin{aligned} |-t|^r f(-t) &= |t|^r \frac{\mathrm{e}^t}{(1+\mathrm{e}^t)^2} \\ &= |t|^r \frac{\mathrm{e}^t \times \mathrm{e}^{-2t}}{((1+\mathrm{e}^t)\,\mathrm{e}^{-t})^2} \\ &= |t|^r \frac{\mathrm{e}^{-t}}{(1+\mathrm{e}^{-t})^2} \end{aligned}$$
donc il suffit de montrer que $\int_0^{+\infty} |t|^r f(t)\,\mathrm{d}t$ converge. Comme $\lim\limits_{t \to +\infty} (1+\mathrm{e}^{-t})^2 = 1$, on a :
$$|t|^r f(t) \underset{t \to +\infty}{\sim} t^r \,\mathrm{e}^{-t}$$
De plus, $t^{r+2}\,\mathrm{e}^{-t} \xrightarrow[t \to +\infty]{} 0$ par croissance comparée donc on a $t^r\,\mathrm{e}^{-t} = o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$. Comme $\int_1^{+\infty} \dfrac{\mathrm{d}t}{t^2}$ est une intégrale de Riemann convergente (car $2 > 1$), le théorème de comparaison pour les intégrales de fonctions positives permet d'affirmer que $\int_1^{+\infty} t^r f(t)\,\mathrm{d}t$ converge. Comme $t \mapsto t^r f(t)$ est continue sur $[0,1]$ l'intégrale $\int_0^1 t^r f(t)\,\mathrm{d}t$ converge aussi donc finalement $\int_0^{+\infty} t^r f(t)\,\mathrm{d}t$ converge, et donc par parité $\int_{-\infty}^{+\infty} t^r f(t)\,\mathrm{d}t$ converge.
On a montré que X admet des moments à tout ordre donc en particulier une espérance (moment d'ordre 1) et un moment d'ordre 2 (donc admet une variance).

Correction de l'exercice 3 :

1) a est strictement positif donc f est positive sur $\mathbb{R}$.
f est continue sur $[1; +\infty[$, sur $]-1; 1[$ et sur $]-\infty; -1]$ par opérations sur des fonctions usuelles. Elle est donc continue sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en -1 et en 1.
L'intégrale $\int_1^{+\infty} \dfrac{1}{x^4}\,\mathrm{d}x$ converge (intégrale de Riemann avec $4 > 1$) donc l'intégrale $\int_{-\infty}^{-1} \dfrac{1}{u^4}\,\mathrm{d}u$ converge aussi par parité de $x \mapsto \dfrac{1}{x^4}$. L'intégrale $\int_{-1}^{1} 0\,\mathrm{d}x$ converge car $x \mapsto 0$ est continue sur $[-1; 1]$. Ainsi, quelle que soit la valeur de a, $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ converge et :
$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x &= 2a \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^4}\,\mathrm{d}x + \int_{-1}^{1} 0\,\mathrm{d}x \\ &= 2a \left[\frac{-1}{3x^3}\right]_{x=1}^{x=+\infty} \\ &= \frac{2a}{3} \end{aligned}$$
donc $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = 1$ si et seulement si $a = \dfrac{3}{2}$. Pour $a = \dfrac{3}{2}$, f est donc une fonction de densité d'une certaine variable aléatoire X.

2) $x \mapsto |x| \times f(x)$ et $x \mapsto |x|^2 f(x)$ sont des fonctions paires, qui sont nulles sur $]-1; 1[$ donc il suffit d'étudier la convergence de $\int_1^{+\infty} x f(x)\,\mathrm{d}x$ et $\int_1^{+\infty} x^2 f(x)\,\mathrm{d}x$.
Pour tout x dans $[1; +\infty[$, $x f(x) = \dfrac{a}{x^3}$ et $x^2 f(x) = \dfrac{a}{x^2}$, et les intégrales $\int_1^{+\infty} x f(x)\,\mathrm{d}x$ et $\int_1^{+\infty} x^2 f(x)\,\mathrm{d}x$ convergent.
On en déduit que X admet une espérance et un moment d'ordre 2.

De plus, $x \mapsto xf(x)$ est impaire sur $\mathbb{R}$ donc $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\,\mathrm{d}x = 0$.
Enfin, $x \mapsto x^2 f(x)$ est paire sur $\mathbb{R}$ donc

$$\begin{aligned} E(X^2) &= 2\int_0^{+\infty} x^2 f(x)\,\mathrm{d}x \\ &= 2\int_1^{+\infty} \frac{a}{x^2}\,\mathrm{d}x \\ &= a\left[\frac{-1}{x}\right]_{x=1}^{x=+\infty} \\ &= a \\ &= \frac{3}{2} \end{aligned}$$

donc d'après la formule de Koenig-Huygens :

$$\begin{aligned} V(X) &= E(X^2) - E(X) \\ &= E(X^2) \\ &= \frac{3}{2} \end{aligned}$$

Correction de l'exercice 5 :

1) $E(X) = \dfrac{a+b}{2}$ et $V(X) = \dfrac{(b-a)^2}{12}$, voir cours pour la preuve.
2) $\sigma = \sqrt{V(X)} = \sqrt{\dfrac{(b-a)^2}{12}} = \dfrac{b-a}{2\sqrt{3}}$

On a d'abord $a < \dfrac{a+b}{2} < b$ donc $E(X) - \sigma < E(X) < b$ et $a < E(X) < E(X) + \sigma$.
Ensuite :

$$\begin{aligned} E(X) - \sigma - a &= \frac{a+b}{2} - \frac{b-a}{2\sqrt{3}} - a \\ &= \frac{\sqrt{3}a + \sqrt{3}b - b + a - 2\sqrt{3}a}{2\sqrt{3}} \\ &= \frac{(1-\sqrt{3})a + (\sqrt{3}-1)b}{2\sqrt{3}} \\ &= \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{3}}(b-a) \end{aligned}$$

avec $\sqrt{3} - 1 \geq 0$ et $b - a \geq 0$ donc $E(X) - \sigma - a \geq 0$ donc $E(X) - \sigma \geq a$. On a donc bien :

$$a \leq E(X) - \sigma \leq b$$

Enfin :

$$\begin{aligned} b - E(X) - \sigma &= b - \frac{a+b}{2} - \frac{b-a}{2\sqrt{3}} \\ &= \frac{2\sqrt{3}b - \sqrt{3}a - \sqrt{3}b - b + a}{2\sqrt{3}} \\ &= \frac{(\sqrt{3}-1)b + (1-\sqrt{3})a}{2\sqrt{3}} \\ &= \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{3}}(b-a) \end{aligned}$$

donc de même : $b - E(X) - \sigma \geq 0$ d'où $E(X) + \sigma \leq b$. On a donc bien :

$$a \leq E(X) + \sigma \leq b$$

3) On a :

$$\begin{aligned}
P(|X - E(X)| \leq \sigma) &= P(-\sigma \leq X - E(X) \leq \sigma) \\
&= P(E(X) - \sigma \leq X \leq E(X) + \sigma) \\
&= \frac{E(X) + \sigma - (E(X) - \sigma)}{b - a} && \text{car } E(X) - \sigma \text{ et } E(X) + \sigma \text{ sont dans } [a, b] \\
&= \frac{2\sigma}{b - a} \\
&= \frac{2(b - a)}{2\sqrt{3}(b - a)} \\
&= \frac{1}{\sqrt{3}} \\
&= \frac{\sqrt{3}}{3}
\end{aligned}$$

Correction de l'exercice 6 :

1) Voir cours
2) Pour tout réel x :

$$F(x) = \begin{cases} 1 - \mathrm{e}^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

(voir cours pour la preuve)

3) $E(X) = \dfrac{1}{\lambda}$ et $V(X) = \dfrac{1}{\lambda^2}$ (voir cours pour la preuve)
4) Notons F_X et F_Y les fonctions de répartition de X et de Y. Pour tout $x \leq 0$ on a $P(Y \leq x) = P(\mathrm{e}^{-X} \leq x) = 0$ car $\forall x \in \mathbb{R}, \mathrm{e}^x > 0$.
Pour tout réel $x > 0$ on a :

$$\begin{aligned}
F_Y(x) &= P(Y \leq x) && \text{par définition} \\
&= P(\mathrm{e}^{-X} \leq x) \\
&= P(-X \leq \ln(x)) && \text{par croissance de ln} \\
&= P(X \geq -\ln(x)) \\
&= P(X > -\ln(x)) \\
&= 1 - P(X \leq -\ln(x)) \\
&= 1 - F_X(-\ln(x))
\end{aligned}$$

on distingue à nouveau deux cas :
- Si $0 < x \leq 1$ alors $\ln(x) \leq 0$ donc $-\ln(x) \geq 0$ et donc $F_Y(x) = 1 - (1 - \mathrm{e}^{\lambda \ln(x)}) = x^\lambda$
- Si $1 < x$, alors $\ln(x) > 0$ donc $-\ln(x) < 0$ et alors $P(X \leq -\ln(x)) = 0$. Finalement :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_Y(x) = \begin{cases} x^\lambda & \text{si } 0 < x \leq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}}$$

Correction de l'exercice 7 :

1) Pour qu'il existe X définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ telle que f est une densité de X, il suffit d'avoir

- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \geq 0$
- f est continue sur $\mathbb{R}$
- $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge et $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = 1$

Dans le cas présent, on a bien $\forall x \in \mathbb{R}, \dfrac{c}{2}\,\mathrm{e}^{-c|x|} \geq 0$ car $\forall x \in \mathbb{R}, \mathrm{e}^x > 0$ et $c > 0$.
De plus, $x \mapsto -c|x|$ est continue sur $\mathbb{R}$ et $x \mapsto \mathrm{e}^x$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc par composition de fonctions continues f est continue.
Enfin, $\mathrm{e}^{-c|x|} = o\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$ par croissance comparée donc $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge.
Pour tout $x > 0$, on a

$$\begin{aligned}
\int_{-x}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t &= \int_{-x}^{0} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_{0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{c}{2}\int_{-x}^{0} \mathrm{e}^{-c|t|}\,\mathrm{d}t + \frac{c}{2}\int_{0}^{x} \mathrm{e}^{-c|t|}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{c}{2}\int_{-x}^{0} \mathrm{e}^{ct}\,\mathrm{d}t + \frac{c}{2}\int_{0}^{x} \mathrm{e}^{-ct}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{c}{2}\left[\frac{\mathrm{e}^{ct}}{c}\right]_{-x}^{0} + \frac{c}{2}\left[-\frac{\mathrm{e}^{-ct}}{c}\right]_{0}^{x} \\
&= \frac{c}{2} \times \left(\frac{1}{c} - \frac{\mathrm{e}^{-cx}}{c} - \frac{\mathrm{e}^{-cx}}{c} + \frac{1}{c}\right) \\
&= 1 - \mathrm{e}^{-cx} \\
&\xrightarrow[x \to +\infty]{} 1
\end{aligned}$$

donc $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = 1$.
On en conclut qu'il existe une variable aléatoire X telle que f est une densité de X.

2) Soit F la fonction de répartition de X, on a

$$\begin{aligned}
\forall x \in]-\infty; 0[, \quad F(x) &= \mathbb{P}(X \leq x) && \text{par définition} \\
&= \int_{-\infty}^{x} \frac{c}{2}\,\mathrm{e}^{-c|t|}\,\mathrm{d}t \\
&= \int_{-\infty}^{x} \frac{c}{2}\,\mathrm{e}^{ct}\,\mathrm{d}t \\
&= \lim_{y \to -\infty} \int_{y}^{x} \frac{c}{2}\,\mathrm{e}^{ct}\,\mathrm{d}t \\
&= \lim_{y \to -\infty} \left[\frac{\mathrm{e}^{ct}}{2}\right]_{y}^{x} \\
&= \lim_{y \to -\infty} \left(\frac{\mathrm{e}^{cx} - \mathrm{e}^{cy}}{2}\right) \\
&= \frac{\mathrm{e}^{cx}}{2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\forall x \in]0; +\infty[, \quad F(x) &= \mathbb{P}(X \leq x) \\
&= \mathbb{P}(X \leq 0) + \mathbb{P}(0 \leq X \leq x)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} + \int_0^x \frac{c}{2}\,\mathrm{e}^{-ct}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2} + \left(\frac{1-\mathrm{e}^{-cx}}{2}\right) \\
&= \frac{2-\mathrm{e}^{-cx}}{2}
\end{aligned}
$$

3) X admet une espérance si et seulement si l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} |tf(t)|\,\mathrm{d}t$ converge.
Par parité de $t \mapsto |tf(t)|$, il suffit de montrer que $\int_0^{+\infty} |tf(t)|\,\mathrm{d}t$ converge.
On a $x\,\mathrm{e}^{-cx} = o(\frac{1}{x^2})$ lorsque $x \to +\infty$ par croissance comparée donc $\int_0^{+\infty} \frac{c}{2}\,\mathrm{e}^{-cx}\,\mathrm{d}x$ converge.
De plus, $t \mapsto tf(t)$ est impaire car f est paire, donc $\mathbb{E}[X] = 0$. En effet, on a $\mathbb{E}[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)\,\mathrm{d}t$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$
\begin{aligned}
\int_{-x}^{x} tf(t)\,\mathrm{d}t &= \int_{-x}^{0} tf(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^x tf(t)\,\mathrm{d}t \\
&= -\int_x^0 (-u)f(-u)\,\mathrm{d}u + \int_0^x tf(t)\,\mathrm{d}t \\
&= -\int_0^x uf(u)\,\mathrm{d}t + \int_0^x tf(t)\,\mathrm{d}t && \text{car } f \text{ est paire} \\
&= 0
\end{aligned}
$$

Ainsi par passage à la limite lorsque $x \to +\infty$ on obtient $\mathbb{E}[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = 0$.

4) Soit $n \in \mathbb{N}$. On a $\frac{c}{2}t^{n+2}\,\mathrm{e}^{-ct} \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$ donc $\frac{c}{2}t^n\,\mathrm{e}^{-ct} = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{c}{2}t^n\,\mathrm{e}^{-c|t|}\,\mathrm{d}t$ converge.
De même, $\frac{c}{2}t^{n+2}\,\mathrm{e}^{ct} = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ lorsque $t \to -\infty$ donc l'intégrale $\int_{-\infty}^{0} \frac{c}{2}t^n\,\mathrm{e}^{-c|t|}\,\mathrm{d}t$ converge.
Ainsi, X admet un moment d'ordre n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

5) X admet un moment d'ordre 2 d'après la question précédente, donc X admet une variance. D'après le théorème de Koenig-Huygens, on a $V(X) = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2 = \mathbb{E}[X^2]$ car $\mathbb{E}[X] = 0$.
Calculons $\mathbb{E}[X^2]$ par intégrations par parties successives :

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}[X^2] &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{c}{2}t^2\,\mathrm{e}^{-c|t|}\,\mathrm{d}t \\
&= 2 \times \frac{c}{2}\int_0^{+\infty} t^2\,\mathrm{e}^{-c|t|}\,\mathrm{d}t && \text{par parité de l'intégrande} \\
&= c \lim_{x\to+\infty} \int_0^x t^2\,\mathrm{e}^{-ct}\,\mathrm{d}t \\
&= c \lim_{x\to+\infty} \left(\left[-\frac{t^2\,\mathrm{e}^{-ct}}{c}\right]_0^x + \int_0^x \frac{2t\,\mathrm{e}^{-ct}}{c}\,\mathrm{d}t\right) \\
&= c \lim_{x\to+\infty} \left(-\frac{x^2\,\mathrm{e}^{-cx}}{c} + \left[-\frac{2t\,\mathrm{e}^{-ct}}{c^2}\right]_0^x + \int_0^x \frac{2\,\mathrm{e}^{-ct}}{c^2}\,\mathrm{d}t\right) \\
&= c \lim_{x\to+\infty} \left(-\frac{x^2\,\mathrm{e}^{-cx}}{c} - \frac{2x\,\mathrm{e}^{-cx}}{c^2} + \left[-\frac{2\,\mathrm{e}^{-ct}}{c^3}\right]_0^x\right) \\
&= c \lim_{x\to+\infty} \left(-\frac{x^2\,\mathrm{e}^{-cx}}{c} - \frac{2x\,\mathrm{e}^{-cx}}{c^2} + \frac{2-2\,\mathrm{e}^{-cx}}{c^3}\right) \\
&= \frac{2}{c^2}
\end{aligned}
$$

par croissances comparée et opérations de limites. Finalement, $V(X) = \frac{2}{c^2}$.

Correction de l'exercice 8 :

1) c est positif donc f est positive sur $\mathbb{R}$.
f est continue sur $]-\infty;1]$, sur $]-1;1[$ et sur $[1;+\infty[$ donc elle est continue sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en -1 et en 1. L'intégrale de Riemann $\int_1^{+\infty} x^{-4}\,\mathrm{d}x = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^4}\,\mathrm{d}x$ converge car $4>1$, donc par parité $\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{x^4}\,\mathrm{d}x$ converge aussi et $\int_{-1}^{1} c\,\mathrm{d}x$ converge comme intégrale d'une fonction continue sur un intervalle fermé borné. Ainsi, $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ converge quelle que soit la valeur de c et :

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x &= \int_{-1}^{1} c\,\mathrm{d}x + 2\int_1^{+\infty} x^{-4}\,\mathrm{d}x && \text{par parité}\\ &= 2c + 2\left[\frac{-x^{-3}}{3}\right]_{x=1}^{x=+\infty}\\ &= 2c+\frac{2}{3}\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = 1 &\iff 2c+\frac{2}{3} = 1\\ &\iff 2c = \frac{1}{3}\\ &\iff c = \frac{1}{6}\end{aligned}$$

donc en posant $c=\frac{1}{6}$, on a bien que f est une densité d'une variable aléatoire X.

2) $x\mapsto |x|f(x)$ et $x\mapsto |x|^2 f(x)$ sont paires, donc il suffit d'étudier la convergence de $\int_0^{+\infty} xf(x)\,\mathrm{d}x$ et de $\int_0^{+\infty} x^2 f(x)\,\mathrm{d}x$. $\int_0^1 xf(x)\,\mathrm{d}x$ et $\int_0^1 x^2 f(x)\,\mathrm{d}x$ convergent comme intégrales de fonctions continues sur un segment car f peut se prolonger par continuité sur $[-1;1]$. Les intégrales $\int_1^{+\infty} xf(x)\,\mathrm{d}x = \int_1^{+\infty}\frac{1}{x^3}\,\mathrm{d}x$ et $\int_1^{+\infty} x^2 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x$ convergent commes intégrales de Riemann (car $2>1$ et $3>1$). Ainsi, par somme, $\int_0^{+\infty} xf(x)\,\mathrm{d}x$ et $\int_0^{+\infty} x^2 f(x)\,\mathrm{d}x$ convergent.
On en déduit que X admet une espérance et une variance. $x\mapsto xf(x)$ est impaire sur $\mathbb{R}$ et $x\mapsto x^2f(x)$ est paire sur $\mathbb{R}$ donc :

$$E(X) = 0$$

et

$$\begin{aligned}V(X) &= 2\int_0^{+\infty} x^2 f(x)\\ &= 2\int_0^1 cx^2\,\mathrm{d}x + 2\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x\\ &= 2c\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 + 2\left[\frac{-1}{x}\right]_{x=1}^{x=+\infty}\\ &= \frac{2c}{3}+2\\ &= \frac{1}{9}+2\\ &= \frac{19}{9}\end{aligned}$$

donc X admet une variance et d'après la formule de Koenig-Huygens :

$$\begin{aligned}V(X) &= E(X^2) - E(X)^2\\ &= \frac{19}{9}\end{aligned}$$

3) D'après la question précédente, X admet un moment d'ordre 1 et un moment d'ordre 2. Si $r \geq 3$ on a $\int_1^{+\infty} x^r f(x)\,\mathrm{d}x = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{4-r}}\,\mathrm{d}x$ avec $4-r \leq 1$, donc c'est une intégrale de Riemann divergente. On en conclut que $\int_{-\infty}^{+\infty} |x|^r f(x)\,\mathrm{d}x$ diverge donc X n'admet pas de moment d'ordre r lorsque $r \geq 3$.

Correction de l'exercice 9 :

1) En 0, $t^{a-1}(1-t)^{b-1} \sim t^{a-1} \sim \frac{1}{t^{1-a}}$. L'intégrale converge en 0 si et seulement si $1-a<1$ si et seulement si $a>0$.

En 1, $t^{a-1}(1-t)^{b-1} \sim (1-t)^{b-1} \sim \frac{1}{(1-t)^{1-b}}$. Par changement de variable $u=1-t$, l'intégrale converge en 1 si et seulement si $\frac{1}{u^{1-b}}$ converge en 0, si et seulement si $b>0$.

Ainsi, $I(a,b)$ converge si et seulement si $a>0$ et $b>0$.

2) Soit $(a,b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$. Alors $a+1>0$ donc $I(a+1,b)$ existe et

$$I(a+1,b) = \int_0^1 t^a(1-t)^{b-1}\,\mathrm{d}t = \left[-\frac{t^a(1-t)^b}{b}\right]_0^1 + \int_0^1 \frac{at^{a-1}(1-t)^b}{b}\,\mathrm{d}t$$
$$= 0 + \frac{a}{b}I(a,b+1)$$

d'où $bI(a+1,b) = aI(a,b+1)$.
On a aussi

$$\begin{aligned}
I(a,b+1)+I(a+1,b) &= \int_0^1 (t^{a-1}(1-t)^b + t^a(1-t)^{b-1})\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 t^{a-1}(1-t)^{b-1}(1-t+t)\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 t^{a-1}(1-t)^{b-1}\,\mathrm{d}t \\
&= I(a,b)
\end{aligned}$$

On en déduit que $I(a+1,b) = \frac{a}{b}I(a,b+1) = \frac{a}{b}\left(I(a,b)-I(a+1,b)\right)$ d'où $I(a+1,b)\left(1+\frac{a}{b}\right) = \frac{a}{b}I(a,b)$ donc $I(a+1,b) \times \frac{a+b}{b} = \frac{a}{b}I(a,b)$ d'où finalement $I(a+1,b) = \frac{a}{a+b}I(a,b)$.

3) f est continue sur $]0;1[$ et constante sur $]-\infty;0[$ et sur $]1;+\infty[$, donc continue sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en 0 et en 1.
De plus, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $f(t) \geq 0$
Enfin, $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{I(a,b)} \int_0^1 t^{a-1}(1-t)^{b-1} = \frac{I(a,b)}{I(a,b)} = 1$.
Finalement, f est bien une densité d'une certaine variable aléatoire X.

4) X admet une espérance si et seulement si $\int_0^1 t \times t^{a-1}(1-t)^{b-1}\,\mathrm{d}t$ converge, si et seulement si $I(a+1,b)$ existe. Or $a>0$ et $b>0$ donc $a+1>0$ donc $I(a+1,b)$ existe d'après la question 1. Ainsi X admet une espérance.
De même, X admet une variance si et seulement si X admet un moment d'ordre 2, si et seulement si $\int_0^1 t^2 t^{a-1}(1-t)^{b-1}\,\mathrm{d}t$ converge, si et seulement si $I(a+2,b)$ existe. Or $a>0$ donc $a+2>0$ donc $I(a+2,b)$ existe. X admet donc un moment d'ordre 2 donc admet une variance.
Enfin, $\mathbb{E}[X] = \frac{1}{I(a,b)} \int_0^1 t \times t^{a-1}(1-t)^{b-1} = \frac{1}{I(a,b)} I(a+1,b) = \frac{a}{a+b}$.
De même, $\mathbb{E}[X^2] = \frac{I(a+2,b)}{I(a,b)}$. Or, $I(a+2,b) = \frac{a+1}{a+b+1}I(a+1,b) = \frac{a+1}{a+b+1} \times \frac{a}{a+b}I(a,b)$. Ainsi, $\mathbb{E}[X^2] = \frac{a(a+1)}{(a+b)(a+b+1)}$.
Finalement,

$$\begin{aligned}
V(X) = \mathbb{E}[X^2]-\mathbb{E}[X]^2 &= \frac{a(a+1)}{(a+b)(a+b+1)} - \frac{a^2}{(a+b)^2} \\
&= \frac{a(a+1)(a+b)-a^2(a+b+1)}{(a+b)^2(a+b+1)}
\end{aligned}$$

$$= \frac{a\big[(a+1)(a+b) - a(a+b+1)\big]}{(a+b)^2(a+b+1)}$$

$$= \frac{ab}{(a+b)^2(a+b+1)}$$

Correction de l'exercice 10 :

1) Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned}
P(V \leq x) &= P\left(-\frac{1}{\lambda} ln(1-U) \leq x\right) \\
&= P\left(\ln(1-U) \geq -\lambda x\right) && \text{car } -\lambda < 0 \\
&= P\left(1 - U \geq \mathrm{e}^{-\lambda x}\right) && \text{par croissance de la fonction exponentielle} \\
&= P\left(U \leq 1 - \mathrm{e}^{-\lambda x}\right) && = F_U(1-\mathrm{e}^{-\lambda x})
\end{aligned}$$

où F_U est la fonction de répartition de U, définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_U(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

Si $x < 0$, on a $-\lambda x > 0$ donc $\mathrm{e}^{-\lambda x} > 1$ et donc $1 - \mathrm{e}^{-\lambda x} < 0$.

$$P(V \leq x) = F_U(1 - \mathrm{e}^{-\lambda x}) = 0$$

Si $x \geq 0$ on a $-\lambda x \leq 0$ donc $\mathrm{e}^{-\lambda x} \leq 1$ et donc $0 \leq 1 - \mathrm{e}^{-\lambda x} \leq 1$, ainsi

$$P(V \leq x) = F_U(1 - \mathrm{e}^{-\lambda x}) = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda x}$$

en conclusion on a pour tout réel x :

$$P(V \leq x) = \begin{cases} 1 - \mathrm{e}^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

2) D'après la question précédente, la fonction de répartition F_V de V vérifie :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_V(x) = \begin{cases} 1 - \mathrm{e}^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

On reconnait la fonction de répartition de la loi exponentielle de paramètre λ. Comme la loi d'une variable à densité est entièrement déterminée par sa fonction de répartition on en déduit que V suit la loi exponentielle de paramètre λ.

Correction de l'exercice 11 :

1)

2)

3) Soit $Z = \dfrac{1}{X}$, notons F_Z la fonction de répartition de Z.

La fonction de répartition de X est $F_X : x \mapsto \int_{-\infty}^{x} \dfrac{1}{\pi(1+t^2)}\,\mathrm{d}t = \dfrac{\arctan(x)}{\pi} + \dfrac{1}{2}$.

Soit $x > 0$ un réel :

$$\begin{aligned}
F_Z(x) &= \mathbb{P}(Z \leq x) \\
&= \mathbb{P}\left(\frac{1}{X} \leq x\right) \\
&= \mathbb{P}\left(X < 0\right) + \mathbb{P}\left(\{X > 0\} \cap \left\{\frac{1}{X} \leq x\right\}\right)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \mathbb{P}(X < 0) + \mathbb{P}(X \geq \frac{1}{x}) \\
&= F_X(0) + (1 - F_X(1/x)) \\
&= \frac{1}{2} + 1 - \left(\frac{\arctan(1/x)}{\pi} + \frac{1}{2}\right) \\
&= 1 - \frac{\arctan(1/x)}{\pi}
\end{aligned}
$$

Si $x = 0$, $F_Z(x) = \mathbb{P}(Z \leq 0) = \mathbb{P}(\frac{1}{X} \leq 0) = \mathbb{P}(X \leq 0) = \frac{1}{2}$
Si $x < 0$, on a

$$
\begin{aligned}
F_Z(x) = \mathbb{P}(Z \leq x)& \\
&= \mathbb{P}\left(\frac{1}{X} \leq x\right) \\
&= \mathbb{P}\left(\frac{1}{x} \leq X < 0\right) \\
&= F_X(0) - F_X(1/x) \\
&= \frac{1}{2} - \left(\frac{\arctan(1/x)}{\pi} + \frac{1}{2}\right) \\
&= -\frac{\arctan(1/x)}{\pi}
\end{aligned}
$$

Finalement, F_Z est définie par $F_Z(x) = \begin{cases} 1 - \dfrac{\arctan(1/x)}{\pi} & \text{si } x > 0 \\ \dfrac{1}{2} & \text{si } x = 0 \\ -\dfrac{\arctan(1/x)}{\pi} & \text{si } x < 0 \end{cases}$

F_Z est dérivable sur $]-\infty; 0[$ et sur $]0; +\infty[$, donc partout sauf en un point, et $\forall x \in \mathbb{R}^*, F_Z'(x) = \frac{1}{x^2} \times \frac{\arctan'(1/x)}{\pi} = \frac{1}{\pi x^2} \frac{1}{1 + (1/x)^2} = \frac{1}{\pi(1 + x^2)} = f(x)$
Puisque $F_Z'(x) = F_X'(x) = f(x)$ en tout point sauf un on en conclut que f est une fonction de densité de Z, Z suit la même loi que X.